

ملاحظة

ليس من الضروري أن تشكل أي أسرة من المجموعات قاعدة لطوبولوجيا ما على X .

مثال 1:

لواحدنا $X = \{a, b, c\}$ و $B = \{b, c\}$ و $A = \{a, b\}$

فإن الأسرة $H = \{X, \emptyset, A, B\}$

لا تشكل قاعدة لأي طوبولوجيا على X لأن شرط التقاطع غير محقق.

لا نقول: (بطريقة نفقن الفرض)

لنفرض جديلاً أن H قاعدة لطوبولوجيا ما على X $H \subseteq \tau \subseteq X$ من

جسمة ناسية إذا احتلنا أي عنصر من τ يجب أن يلي اجتماع لعناصر

من H ونلاحظ أن أي اجتماع لعناصر من H هو عنصر من H

وهذا يعني $H \subseteq \tau$ (حيث H توي τ) ومنه يكون

$\tau = H$ هذا يعني أن H طوبولوجيا وهذا غير صحيح وهذا يتناقض

لأن $A \cap B \notin H$

مثال 4

مبرهنة

لتكن X مجموعة ما، B أسرة من المجموعات ~~مجموعات~~ الجزئية تقع الشروط التالية

(1) X يساوي اتحاداً لعناصر B

(2) من أجل أي $u, v \in B$ وأي عنصر $x \in u \cap v$ توجد مجموعة w من B

بحيث $x \in w \subseteq u \cap v$

إن الأسرة τ المولدة من المجموعات التي سبقتها يساوي اجتماع لعناصر من B

بشكل طوبولوجيا على X ونشير إليها بالطوبولوجيا الوحيدة التي قاعدتها B

البرهان

$$A \cap B = \bigcup_{x \in A \cap B} \{x\} \quad (1)$$

(2) إن B يشكل قاعدة لـ τ من طريقة بانيها

القاعدة الجزئية :

(X, τ) فضاء طوبولوجي وأسرة من المجموعات المفتوحة $(\mathcal{S} \subseteq \tau)$ نسمى الأسرة \mathcal{S} قاعدة جزئية للطوبولوجيا τ إذا كانت أسرة التقاطعات المستحصلة من \mathcal{S} تساوي قاعدة τ طوبولوجيا.

مثال 1 :

لنأخذ الفضاء المنقطع $X = \{a, b, c\}$
 $\tau = \{ \emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$
 $\mathcal{S} = \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \}$ ← ليست قاعدة
 ليست قاعدة جزئية

مثال 2 :

~~لنأخذ الفضاء المنقطع $X = \{a, b, c\}$~~

ليكن R فضاء طوبولوجي حقيقي أسرة الحاصلات المفتوحة $\beta = \{ [a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

$$\mathcal{S} = \{ [a, b] \mid a < b \}$$



هذا مثال من قاعدة جزئية

المجموعات المغلقة :

تعريف : لنكن F مجموعة جزئية من الفضاء الطوبولوجي τ نسمى المجموعة F

مجموعة مغلقة إذا كان متممها مفتوحة $X \setminus F = \mathcal{U}$

المجموعة المفتوحة \iff متممها مغلقة

المجموعة المغلقة \iff متممها مفتوحة

مبرهنت

1. أن المجموعات المغلقة في الفضاء الطوبولوجي تحقق الخواص التالية

1- أي تقاطع لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة

2- اجتماع عدد منتهي من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة

3- \emptyset, X مجموعتان مغلقتان

البرهان :

ينبع من التعاريف وقوانين ديمورغان

مفهوم النقاط مفتوحة أي $\{x \mid \mathcal{N}_x\}$ إذا المجموعة مغلقة $A_x \setminus \{x\}$

داخلية مجموعة:

ليكن X فضاء طوبولوجي (X, τ) و A مجموعة من X أي $A \subseteq X$
 x نقطة من A أي أن $x \in A$ تسمى x نقطة داخلية لـ A إذا
 وجود مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث $x \in U \subseteq A$

أن مجموعة نقاط الداخلية لمجموعة A تسمى داخلية A وسوف نرمز لها
 بالرمز A°

واضح من التعريف أن $A^\circ \subseteq A$ وإذا كان $A \subseteq B$ فإن $A^\circ \subseteq B^\circ$

برهنت:

لذلك A مجموعة جزئية من فضاء طوبولوجي (X, τ) عندئذ

① A° تسمى اجتماع جميع المجموعات المفتوحة المحتواة في A

② A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A

③ تكون A مجموعة مفتوحة فقط إذا كان $A = A^\circ$

برهنت:

بفرض A, B مجموعتان في الفضاء (X, τ) عندئذ يكون

$$\emptyset^\circ = \emptyset \quad \text{و} \quad X^\circ = X \quad \text{④}$$

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ \quad \text{⑤}$$

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad \text{⑥}$$

ملاحظة:

⑦ X, \emptyset مجموعتان مغلقتان ومفتوحتان \emptyset بأن واحد في أي فضاء طوبولوجي.

⑧ تكون المجموعة مفتوحة لا يعني عكسها أنها مغلقة

⑨ يوجد من المجموعات المفتوحة بعدد ما يوجد من المجموعات المغلقة

مثال:

في الفضاء الطوبولوجي المتقطع (متوينة) أي أن كل المجموعات مفتوحة

علاوة على المجموعات المغلقة في هذا الفضاء

في كل المجموعات مفتوحة هذا يعني أن كل المجموعات مغلقة

C د

ليكن A مضاد (A, \mathcal{C}) التي تحتوي ① مع \emptyset نفا في المجموعات المفتوحة
أي مجموعة تحتوي ① في مجموعات مفتوحة مع \emptyset
والمجموعات المطلقة أي مجموعة لا تحتوي ①

المستعينة والمهاقة

تعريف ١ لنكن A مجموعة جزئية من الفضاء (X, \mathcal{C}) و x من الفضاء
 $x \in X$ نسمي النقطة x نقطة ترأس للمجموعة A إذا كان أي جوار
لنقطة x يتقاطعه مع A بنقاط مختلفة عن x نفسها

من اصل ١ أي $x \in N(x) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$
أن مجموعة نقاط الترأس لمجموعة A تسمى مشتقة A ونرمز لها بالرمز A'

تعريف ٢

لنكن A مجموعة جزئية من الفضاء الطوبولوجي (X, \mathcal{C}) تسمى النقطة x
نقطة x لاصقة بالمجموعة A إذا كان أي جوار لنقطة x يتقاطع
مع A و $x \in A$: $x \in N(x) \cap A \neq \emptyset$
أن مجموعة النقاط اللاصقة بالمجموعة A تسمى لهافة A
ونرمز لها بالرمز \bar{A}

المستنتج

أي أن لهافة تحتوي على نقطة ترأس في نقطة لاصقة
أي أن $A \subseteq \bar{A}$ $A' \subseteq \bar{A}$ أي $A' \subseteq \bar{A}$
كما أن أي نقطة تنتمي لمجموعة في راسها لابد لاصقة لها

برهنة

أي مضاد طوبولوجي تتحقق العلاقة التالية $\bar{A} = A \cup A'$
مع ملاحظة أن النقطة اللاصقة التي ليست نقطة ترأس
تكون نقطة معزولة
سواء أن النقطة اللاصقة لا المجموعة والتي لا تنتمي إليها تكون
نقطة ترأس

برهنة ٢

لنكن A مجموعة جزئية من الفضاء الطوبولوجي (X, \mathcal{C})
أي \bar{A} نأري جميع المجموعات المطلقة التي تحتوي A

Date : / /



Subject:

١. \bar{A} هي أصغر مجموعة مغلقة تحتوي على A
٢. A مغلقة فقط إذا كانت $A = \bar{A}$

برهنة:

$$\bar{\emptyset} = \emptyset \quad \text{و} \quad \bar{X} = X \quad (1)$$

$$(\bar{A}) = (\bar{\bar{A}}) \quad (2)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (3)$$

$$A \subseteq B \implies \bar{A} \supseteq \bar{B} \quad (4)$$

بمعنى آخر، تكون A مغلقة فقط إذا كان $\bar{A} \subseteq A$